§4.4 解析函数的唯一性及最大模原理

一、解析函数的零点

1. 定义

Def 1. 若解析函数 $f(z)$ 在点 a 满足 $f(a)=0$，则称 a 是 $f(z)$ 的一个零点。

Def 2. 若 $f(z)$ 在 a 点解析，且 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0$，$f^{(m)}(a)\neq 0$，$(m\geq 1)$，则称 a 是 $f(z)$ 的 m 级零点。

例如，$f(z)=z^2$ 在 $z=0$ 是 2 级零点，

$f(z)=(z-3)^5$ 在 $z=3$ 是 5 级零点。

$f(z)=z-\sin z$ 在 $z=0$ 是 3 级零点

2. m 级零点的判别法

Thm 1. 设 $f(z)$ 在 $z=a$ 解析非常数，则 $z=a$ 是 $f(z)$ 的 m 阶零点

$\Longleftrightarrow$ $f(z)$ 在 a 的邻域内可表示为 $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$。

这里 $\varphi(z)$ 在 $z=a$ 解析且 $\varphi(a)\neq 0$。

Pf. $\Rightarrow$：若 a 是 $f(z)$ 的 m 级零点，则 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0$，

$f^{(m)}(a)\neq 0$.

$f(z)$ 在 a 的邻域内展成 Taylor 级数：

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\cdots+\frac{f^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}(z-a)^{m-1}+\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m+\cdots$$

$$=0+(z-a)^m\left[\frac{f^{(m)}(a)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(z-a)+\cdots\right]$$

$$\overset{\text{记作}}{=}(z-a)^m\cdot\varphi(z)$$

这里 $\varphi(z)$ 显然解析，且 $\varphi(a)=\dfrac{f^{(m)}(a)}{m!}\neq 0$.

$\Leftarrow$：若 $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 $z=a$ 解析且 $\varphi(a)\neq 0$

将$\varphi(z)$展成幂级数:

$\varphi(z)=\varphi(a)+\varphi'(a)(z-a)+\cdots$

$f(z)=(z-a)^m\varphi(z)=\varphi(a)(z-a)^m+\varphi'(a)(z-a)^{m+1}$

由幂级数展开的唯一性,

$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$,易知$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0$

$f^{(m)}(a)=m!\cdot\varphi(a)\neq0$,故$a$是$f(z)$的$m$级零点.

Rem. 非零函数的解析函数的零点存在时必有级

(实分析中不一定成立)

二. 解析函数的唯一性、零点的孤立性

Thm 2. 设$f(z)$在a点解析非常数,且$f(a)=0$则$f(z)$在a的某邻域内没有异于a的零点

Pf. $f(z)$在$z=a$解析非常数,且$f(a)=0$,则$\exists\, m\geq1$ s.t. $f(z)$以a为m级零点. 由Thm 1, $f(z)$在a的某邻域内有$f(z)=(z-a)^m\cdot\varphi(z)$,其中$\varphi(z)$解析且$\varphi(a)\neq0$,由于$\lim\limits_{z\to a}f(z)=f(a)\neq0$, $\exists$更小邻域使$\varphi(z)$在其中无零点.

于是$f(z)$在该小邻域上只有$z=a$一个零点.

Cor. 设$f(z)$在圆域$D:|z-a|<R$上解析~~非常数~~,且存在一列$\{z_n\}$, $z_n\neq a$, $z_n\in D$使$z_n\to a$且$f(z_n)=0$. 则在圆域D上$f(z)\equiv0$.

Pf. 由Thm 2知,$f(z)$在$z=a$解析非常数, $f(z_n)=f(a)=0$

$f(z)$在a的某邻域内$f(z)\equiv0$,于是$f(a)=f^{(n)}(a)=0\ (n=1,2,\cdots)$

由Taylor定理,在$z=a$有$f(z)$的幂级数$f(z)=0$.

故在$|z-a|<R$上$f(z)\equiv0$.

Thm 3. 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 上都解析，且存在 D 上一列点 $\{z_n\}$，$z_n \to a \in D$，$f(z_n)=g(z_n)$，则在 D 上 $f(z)\equiv g(z)$.

Pf. 记 $F(z)=f(z)-g(z)$，$\{z_n\}$ 与 a 均为 $F(z)$ 的零点，

由 Cor，$\exists\, a$ 的邻域 $K_0: |z-a|<\rho_0$ 使在 K_0 上 $F(z)\equiv 0$.

$\forall\, b\in D$，下证 $F(b)=0$：

用 D 内折线连接 a 到 b，加入分点 $a=z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n=b$

以 $z_0,\cdots,z_{n-1}$ 为圆心作小圆 $K_0, K_1, \cdots, K_{n-1}$ 且 $K_i\subset D$，

$z_i\in K_{i-1}\ (i=1,2,\cdots,n-1)$，$b\in K_{n-1}$

于是在 K_0 内 $F(z)\equiv 0$，类似在 K_1 内 $F(z)\equiv 0$，K_2 内 $F(z)\equiv 0$，

这样在 K_{n-1} 上 $F(z)\equiv 0$，而 $b\in K_{n-1}$，于是 $F(b)=0$

由 b 的任意性，$F(z)\equiv 0$，即 $f(z)\equiv g(z)$

三、最大模原理

Thm 4. 设 $f(z)$ 在区域 D 上解析非常数，则 $|f(z)|$ 在 D 上没有最大值.

Pf. 记 $\sup\limits_{z\in D}|f(z)|=M$

若 $M=+\infty$，结论显然成立

若 $0<M<+\infty$，若 $\exists\, z_0\in D$ s.t. $|f(z_0)|=M$

取 $K: |z-z_0|<R$ s.t. $K\subset D$，由平均值定理，

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\theta})\,d\theta \quad (0<\rho<R)$$

$$M=|f(z_0)|\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+\rho e^{i\theta})|\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\cdot M\cdot 2\pi = M.$$

若 $\exists\,\theta_0$ s.t. $|f(z_0+\rho e^{i\theta_0})|<M$，则 $M<M$ 矛盾.

这样在 $|z-a|=\rho$ 上 $|f(z)|\equiv M$. 由 ρ 的任意性，

在 $K: |z-z_0|<R$ 上 $|f(z)|\equiv M$.

于是$f(z)$在K上恒为常数
由唯一性定理，$f(z)$在D上恒为常数，与条件矛盾.

Cor. 若$f(z)$在有界闭区域$\bar{D}=D+C$上连续，在D上解析，
则$|f(z)|$最大值在C上取到. 当$f(z)$非常数时$|f(z)|$最大值
在D内取不到.

Thm 5.（最小模定理）
设$f(z)$在区域D上解析且非常数$f(z)$在D上无零点，则$|f(z)|$
在D内取不到最小值.

Pf. 记$F(z)=\frac{1}{f(z)}$在D内解析非常数，F(z)满足最大模
原理，$\left|\frac{1}{f(z)}\right|$取不到最大值$(z\in D)$
即$|f(z)|$取不到最小值.$(z\in D)$

Cor. 设$f(z)$在有界闭区域$\bar{D}$连续非常数且无零点，则$|f(z)|$
取不到最值，这时$|f(z)|$的上、下确界只能在边界上取到.

四、施瓦茨引理

Thm6. 设$f(z)$在$|z|<1$上解析，且$f(0)=0$，$|f(z)|\leq 1$，则：

(1) 在$|z|<1$上$|f(z)|\leq|z|$

(2) 若存在一点z_0 s.t. $|z_0|<1$且$|f(z_0)|=|z_0|$，则$f(z)=e^{i\alpha}\cdot z$

(3) $|f'(0)|<1$

Pf. (1) $f(z)$在$z=0$处展成泰勒级数：$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$

由$f(0)=0$，$f(z)=f'(0)z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\cdots$

$$=z\left(f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}z+\cdots\right)=z\cdot\varphi(z)$$

这里$\varphi(z)$在$|z|<1$上解析，且$\varphi(z)=\begin{cases}\frac{f(z)}{z}, & z\neq 0, |z|<1\\ f'(0), & z=0.\end{cases}$

$\forall z_0, |z_0|<1$，若 $z_0=0$，则 $|f(0)|=0\le 0$，显然成立

若 $|z_0|<1$ 且 $z_0\neq 0$，取 $\Gamma_\rho: |z|=\rho$ s.t. $|z_0|<\rho<1$

由最大模原理：$|\varphi(z_0)|\le \max\limits_{z\in\Gamma_\rho}|\varphi(z)| = \max\limits_{z\in\Gamma_\rho}\left|\frac{f(z)}{z}\right|\le\frac{1}{\rho}$

令 $\rho\to 1^-$，得 $|\varphi(z_0)|\le 1$，即 $|f(z)|\le|z|$

(2) 若 $\exists z_0, |z_0|<1$ s.t. $|f(z_0)|=|z_0|$，即 $|\varphi(z_0)|=1$

于是 $\varphi(z)$ 在 Γ_ρ 内取到最大模，$\varphi(z)$ 在 $|z|<\rho$ 上恒为常数

由 $|z_0|<\rho<1$ 知，$\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 上恒为常数，$|\varphi(z)|=1$

记 $\varphi(z)=e^{i\alpha}$，在 $|z|<1$ 上 $f(z)=e^{i\alpha}\cdot z$

(3) $f'(0)=\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}$，由 $\left|\frac{f(z)}{z}\right|\le 1$，$|f'(0)|\le 1$

例 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 上解析且 $|f(z)|<1$，则 $|f'(0)|\le 1-|f(0)|^2$

Pf. 构造 $F(z)=\dfrac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}$，则 $F(z)$ 在 $|z|<1$ 上解析且 $F(0)=0$.

$|F(z)|<1$，由 Schwartz 引理，$|F'(0)|\le 1$

$$F'(z)=\frac{f'(z)\cdot[1-\overline{f(0)}f(z)]+\overline{f(0)}f'(z)\cdot[f(z)-f(0)]}{(1-\overline{f(0)}f(z))^2}\overset{z=0}{=}\frac{f'(0)}{1-|f(0)|^2}$$

于是 $|f'(0)|\le 1-|f(0)|^2$